8.4 重积分的应用

在前面几节中我们已经介绍了利用重积分可以求空间立体体积以及空间物体的质量，本节再介绍重积分在几何和物理方面的几个应用。

8.4.1 微元法（元素法）

如果要求的量U

(1) U 对于有界闭区域D具有可加性；

(2) 在D内任取一直径很小的闭区域$d\sigma$，相应的部分量可近似地表示为

量U的元素（微元）

$$\Delta U \approx f(x,y)d\sigma = dU$$

$$\Delta U - f(x,y)d\sigma \qquad (x,y) \in d\sigma$$

是较$d\sigma$高阶的无穷小 ($f(x,y)$连续时成立)，则：

$$U = \iint_D f(x,y)d\sigma$$

曲顶柱体的体积 $V=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$

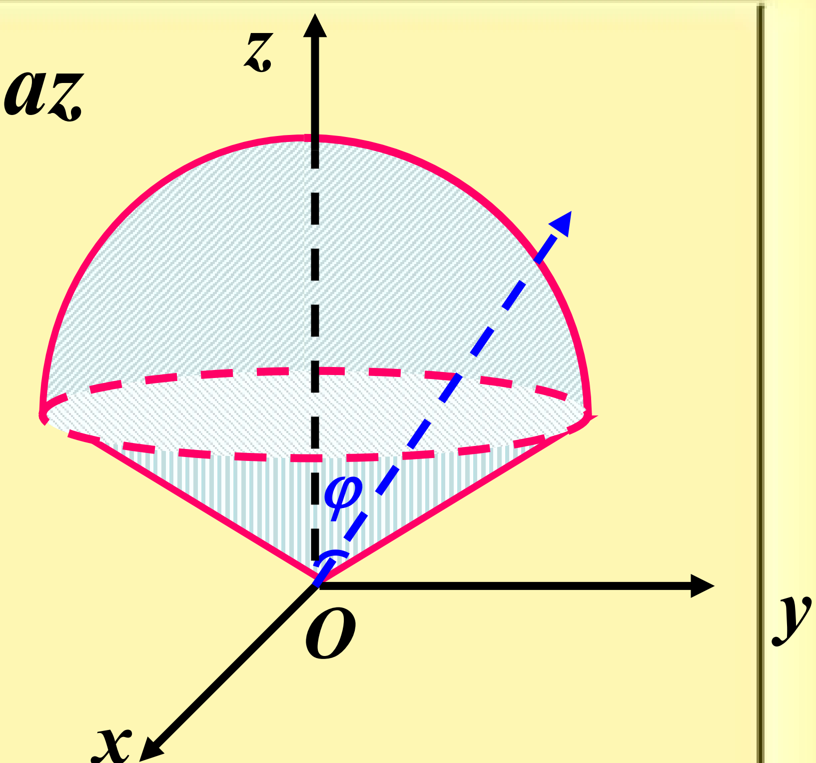
平面薄片的质量 $m=\iint\limits_{D} \rho(x,y)d\sigma$

空间物体的质量 $m=\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv$

平面区域D的面积 $A=\iint\limits_{D} d\sigma$

空间区域Ω的体积 $V=\iiint\limits_{\Omega} dv$

例1 求曲面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 与顶点在原点O,轴与 z 轴重合,半顶角为α的内接锥面所围成的立体的体积。



解 球面方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

即: $r=2a\cos\varphi$,

锥面方程为$\varphi=\alpha$

立体所占有的空间闭区域 Ω 可用不等式表示:

$$0\le r\le 2a\cos\varphi, 0\le\varphi\le\alpha, 0\le\theta\le 2\pi,$$

所以 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

Ω: $0 \le r \le 2a\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \alpha,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

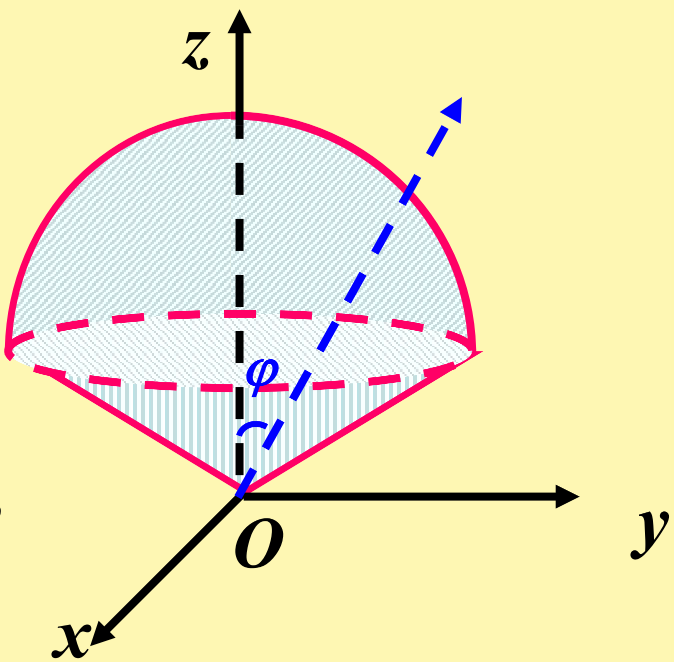
$$V = \iiint_{\Omega} dv$$

$$= \iiint_{\Omega} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \, dr$$

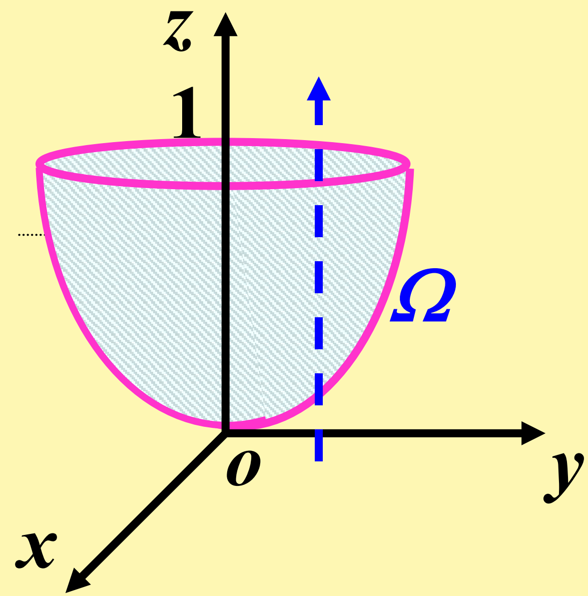
$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \, dr$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos^4\alpha)$$



例2 一立体由抛物面$z = x^2 + y^2$及平面$z = 1$所围成,密度$\rho = |x| + |y|$,求其质量。

解 立体的图形为



设Ω_1为Ω在第一卦限内的部分,

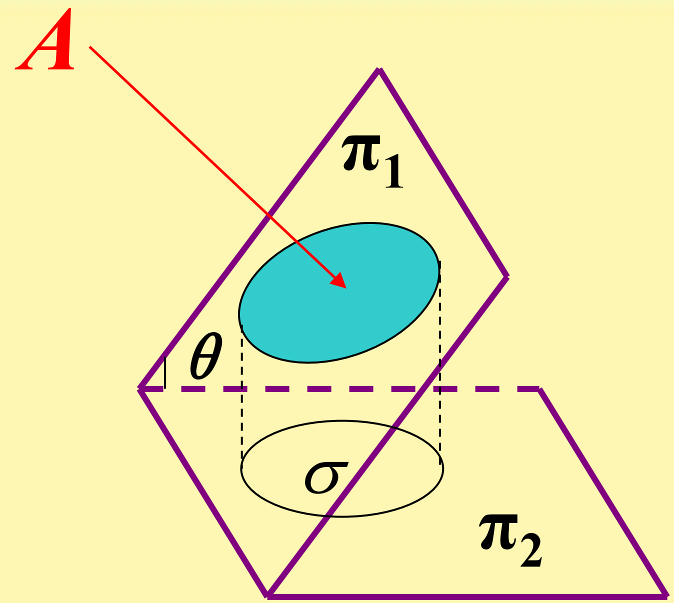
$$M = \iiint_{\Omega} |x| + |y| dv = 2\iiint_{\Omega_{右}} |x| + |y| dv$$

$$= 4\iiint_{\Omega_1} (|x| + |y|) dv = 4\iiint_{\Omega_1} (x + y) dv$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 r(\cos\theta + \sin\theta) dz$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta \int_0^1 r^2 (1 - r^2) dr = \frac{16}{15}。$$

8.4.2 曲面的面积

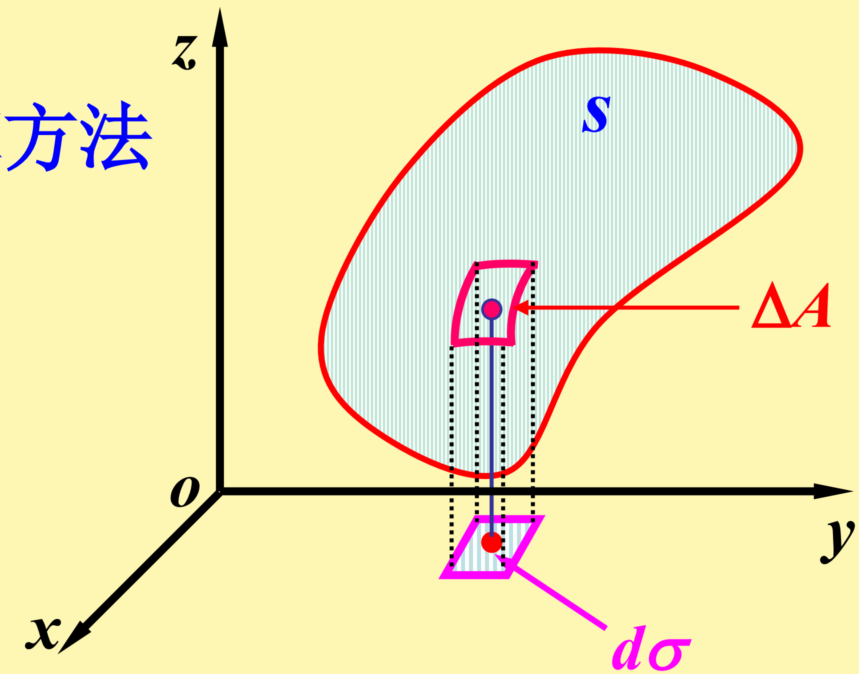


1. 平面有界闭区域在另一平面上投影的面积

$$\sigma = A\cos\theta$$

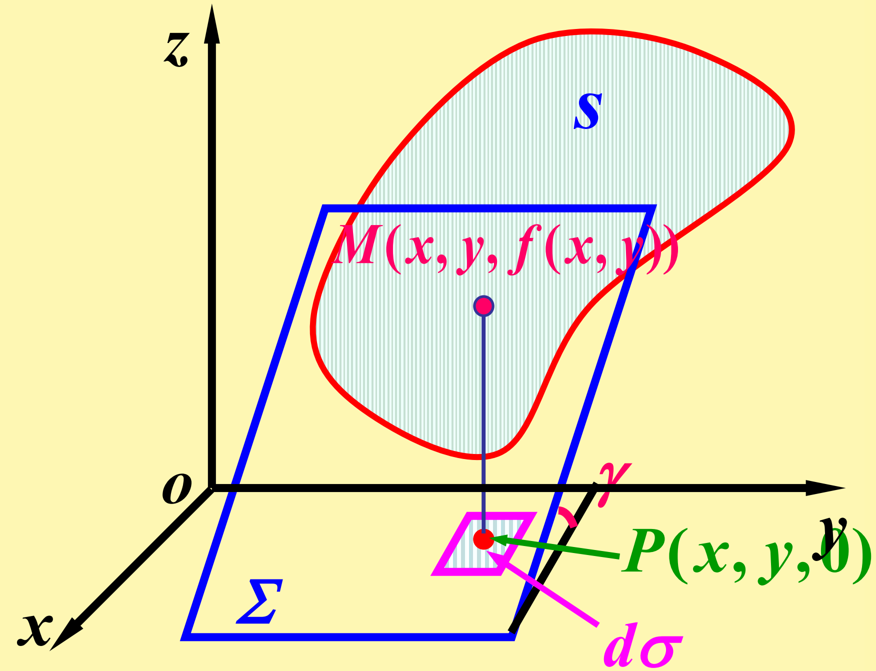
θ为两平面的夹角

2. 曲面面积的计算方法



2．曲面面积的计算方法

设曲面S：$z=f(x,y),(x,y)\in D$，
f在D上一阶偏导连续。



显然

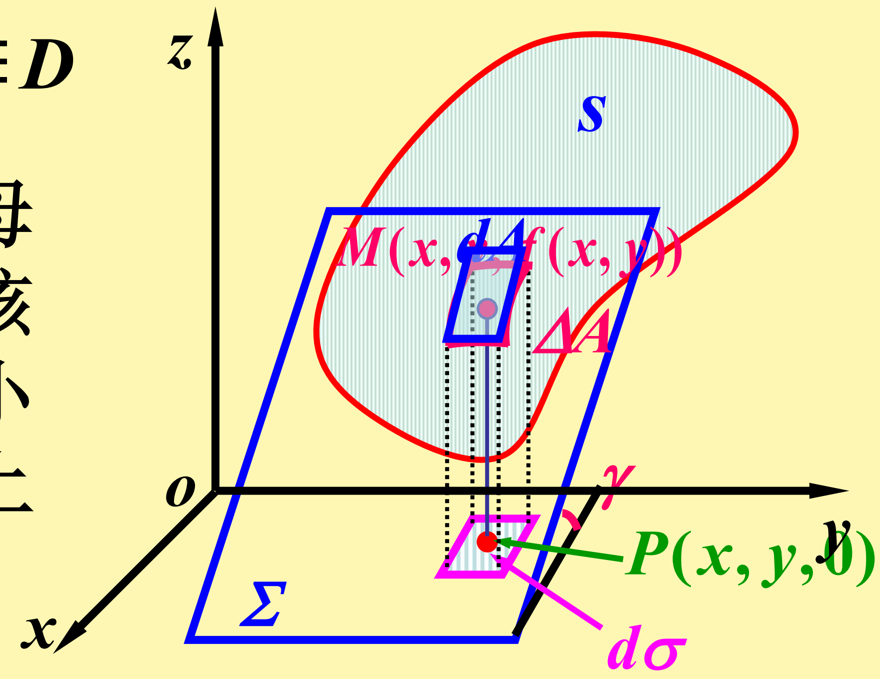
(1) S的面积A对于D具有可加性

(2)在D内任取一直径很小的区域$d\sigma$，在$d\sigma$上任取一点$P(x,y,0)$对应于S上一点$M(x,y,f(x,y))$。

(3) 过点$M(x,y,f(x,y))$，作S的切平面Σ。

曲面S：$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$

(4)以$d\sigma$的边界为准线作母线平行于z轴的柱面，该柱面在曲面S上截下一小片曲面ΔA，在切平面Σ上截下来一小片平面dA。



由于$d\sigma$直径很小，f_x, f_y连续，有$\Delta A\approx dA$。

dA与$d\sigma$之间的关系：$d\sigma = dA\cos\gamma$

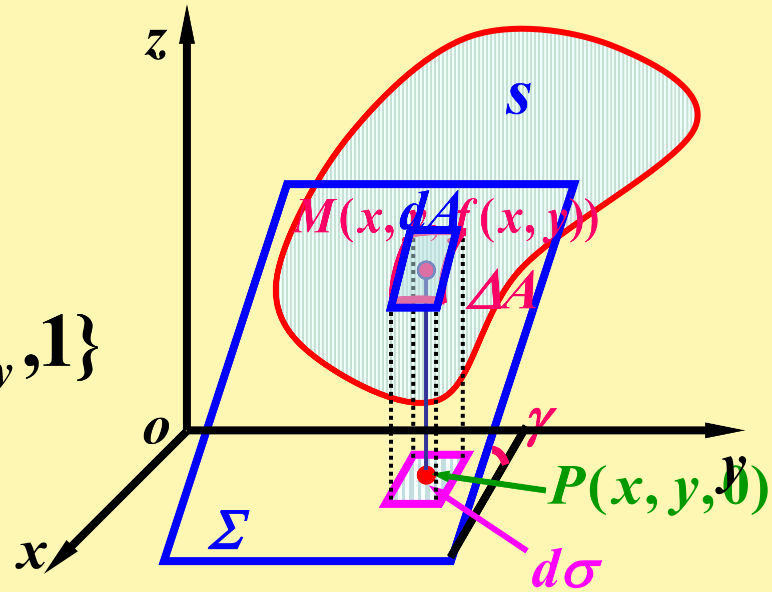
γ为切平面Σ与平面xOy的夹角

即：曲面S在点M处的法向量与z轴的夹角

曲面S：$z=f(x,y),(x,y)\in D$

$$\vec{n}=\{-f_x,-f_y,1\},$$

$$\vec{n}^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\{-f_x,-f_y,1\}$$



$$\vec{n}^{\circ}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\therefore \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$d\sigma=dA\cos\gamma,$$

$$dA=\frac{d\sigma}{\cos\gamma}=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

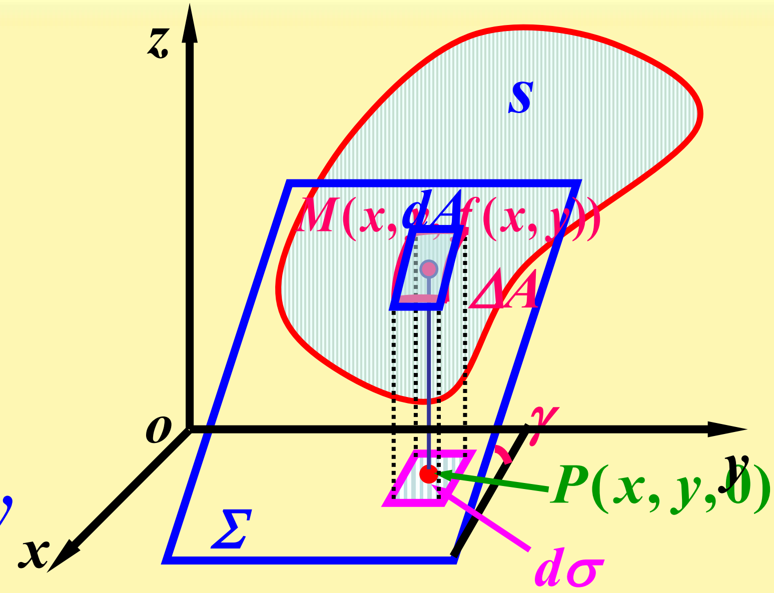
曲面S的面积元素

曲面S：$z=f(x,y),(x,y)\in D$

曲面S的面积元素：

$$dA=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$



②曲面方程：$x=g(y,z)$

$(y,z)\in D_{yz}$

$$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

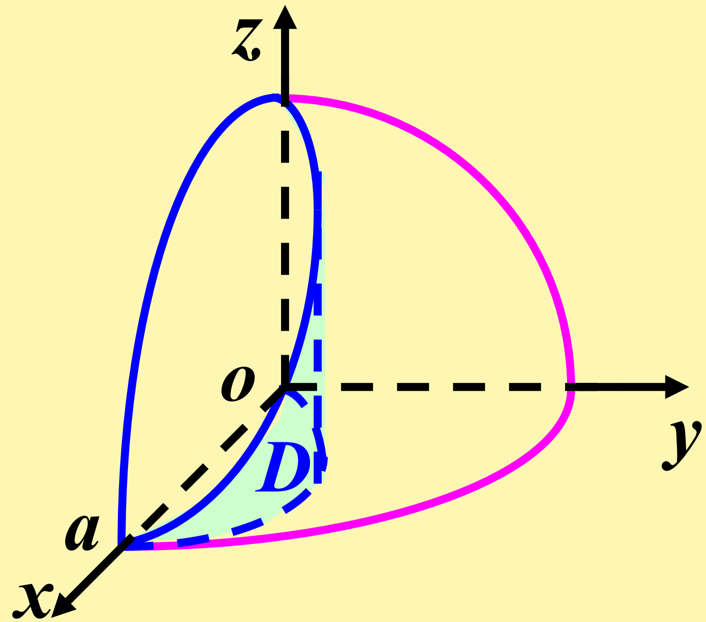
③曲面方程：$y=h(z,x)$

$(z,x)\in D_{zx}$

$$A=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dzdx$$

例3 求下列曲面的面积

(1) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面$x^2+y^2=ax$所截部分的面积。



由对称性, $A=4A_1$

(第 I 卦限内的部分)

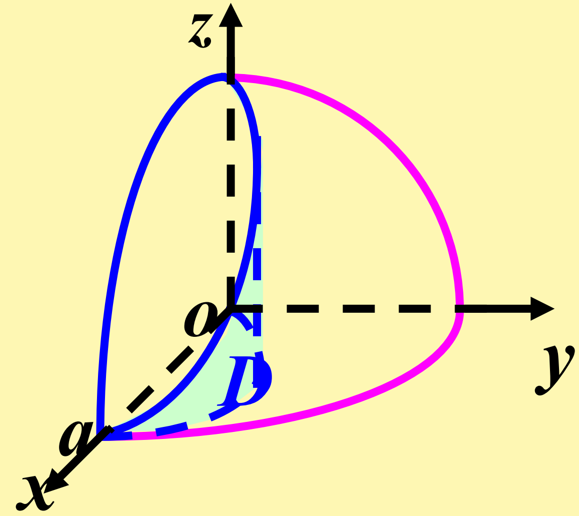
又$\because x^2+y^2+z^2=a^2$,

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$dA=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,d\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

(1) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面$x^2+y^2=ax$所截部分的面积。



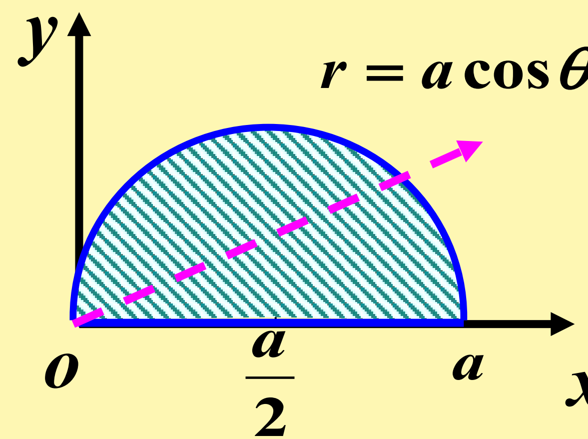
$$dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$A=4\iint_D dA$$

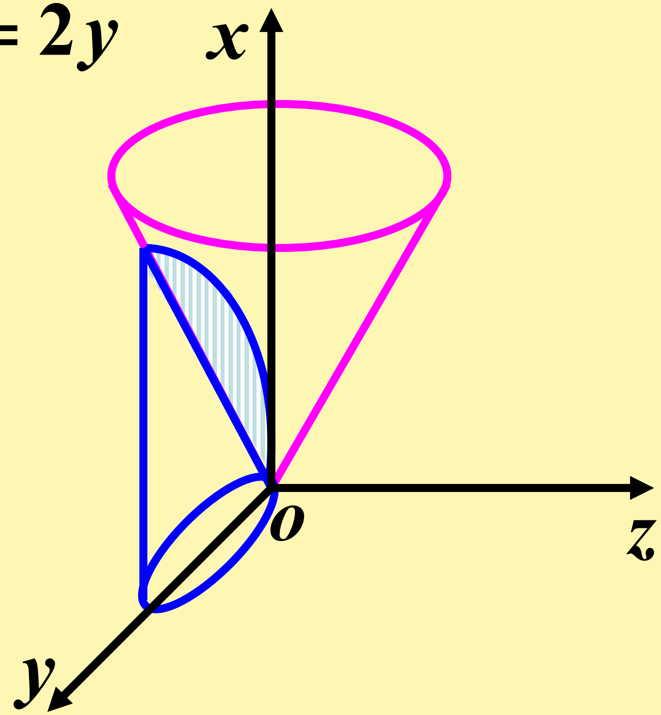
$$=4\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot rdr$$

$$=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{a^2-r^2})\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=4a^2(\frac{\pi}{2}-1)$$



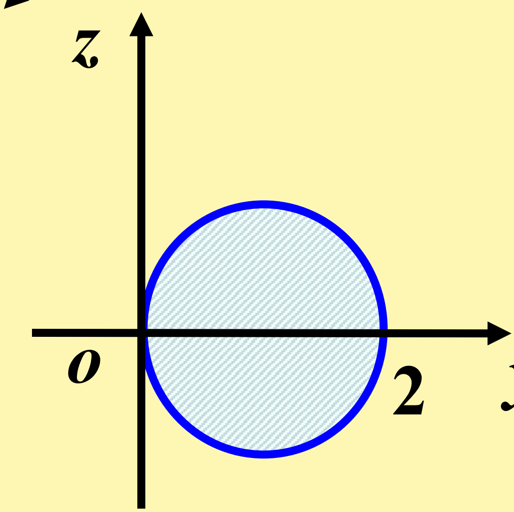
(2) 锥面 $x=\sqrt{z^2+y^2}$ 被 $z^2+y^2=2y$ 所截部分的面积。



$$\because x=\sqrt{z^2+y^2}$$

$$\therefore x_z=\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}},\ x_y=\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}$$

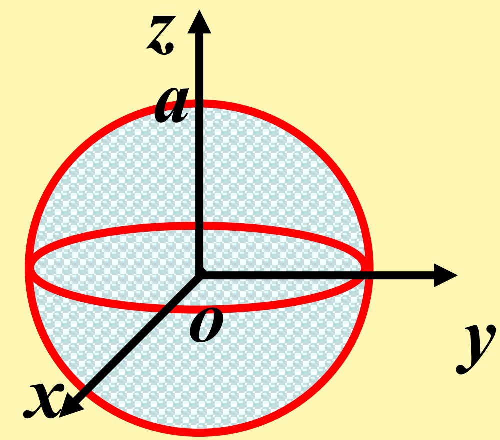
$$dA=\sqrt{1+x_z^{\ 2}+x_y^{\ 2}}\,d\sigma \quad =\sqrt{2}\,dydz$$



$$A=\iint_D dA \ =\iint_D \sqrt{2}\,dydz$$

$$=\sqrt{2}\cdot\pi\times 1^2=\sqrt{2}\pi$$

例4 求半径为a的球的表面积。



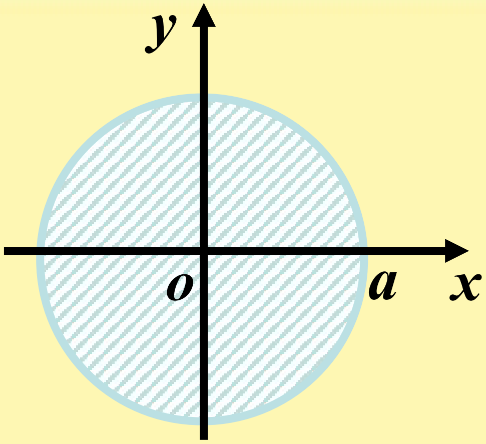
解 取$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, z\geq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

例4 求半径为a的球的表面积。



$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le a^2$$

$$dA = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$\therefore A = \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} rdrd\theta = a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$= 2\pi a \cdot \lim_{b \to a^-} \int_0^b \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a \cdot \lim_{b \to a^-} (a - \sqrt{a^2 - b^2})$$

$$= 2\pi a^2$$

所以整个球面的面积为$A=4\pi a^2$

8.4.3 质心

质量中心简称为质心，指物质系统上被认为质量集中于此的一个**假想点**。

设在xoy平面有n个质点分别位于(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)处，质量分别为m_1、m_2、…、m_n,由力学知道:

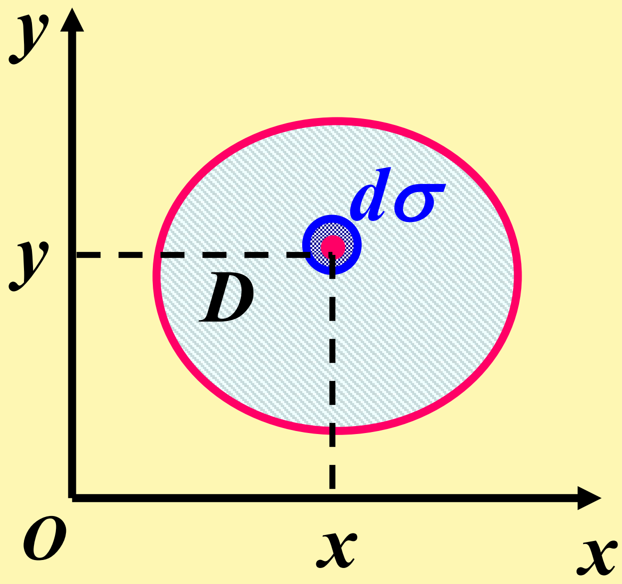
$$M_y=\sum_{i=1}^{n}x_i m_i,\quad M_x=\sum_{i=1}^{n}y_i m_i$$

M_y、M_x叫质点系对于坐标轴的静力距。

该质点系的质心坐标 $G(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

设有平面薄片,占有xoy平面上的闭区域D,点(x, y)处的面密度为$\rho(x, y)$在D上连续,求$G(\bar{x}, \bar{y})$。



先将物体分割为许多小部分，考虑其中的一个部分$d\sigma$，它的质量元素为

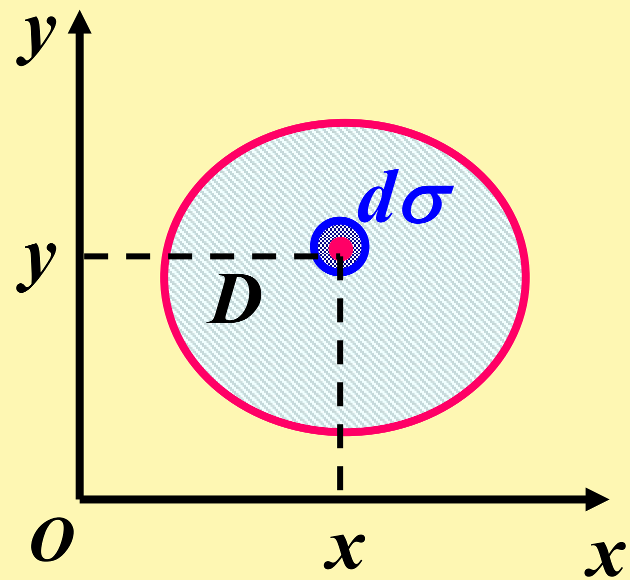
$$dm = \rho(x, y)d\sigma$$

这个部分$d\sigma$对于x轴以及对于y轴的静力距元素为

$$dM_x = ydm = y\rho(x, y)d\sigma$$

$$dM_y = xdm = x\rho(x, y)d\sigma$$

以这些元素为被积表达式，在闭区域D上积分，可得



平面薄板对y轴的静力矩：

$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)d\sigma$$

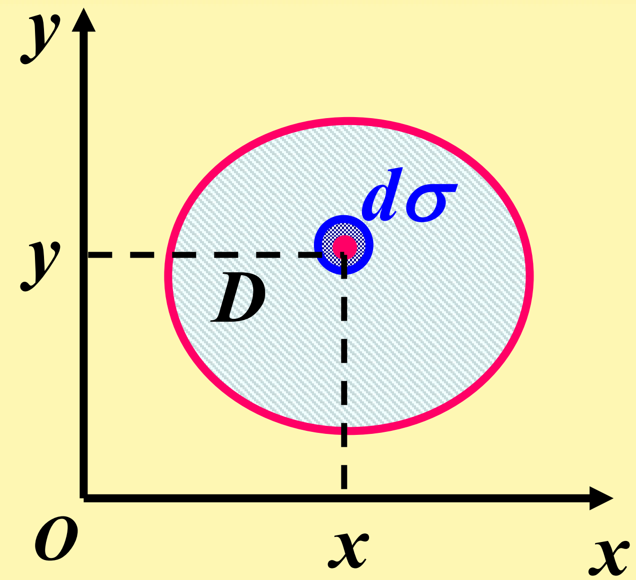
平面薄板对x轴的静力矩：

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)d\sigma$$

所以平面薄片的质心坐标$G(\bar{x},\bar{y})$为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$$

如果薄片是均匀的，
即当$\rho(x,y)$为常量时，可
得到如下的质心坐标：



$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho_0 d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho_0 d\sigma}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} x d\sigma,$$

A：平面薄板的面积

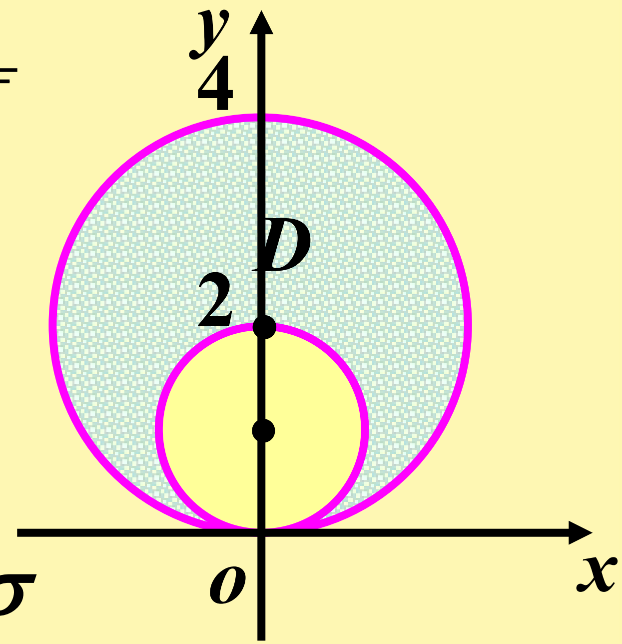
$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} y d\sigma$$

$(\bar{x},\bar{y})$————形心

这时薄片的质心完全由闭区域D的形状决定，这样求得的质心又称为平面薄片的形心。

例6 求位于两圆$r=2\sin\theta$和$r=4\sin\theta$之间的均匀薄片的质心(如图)。

$$r=2\sin\theta \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



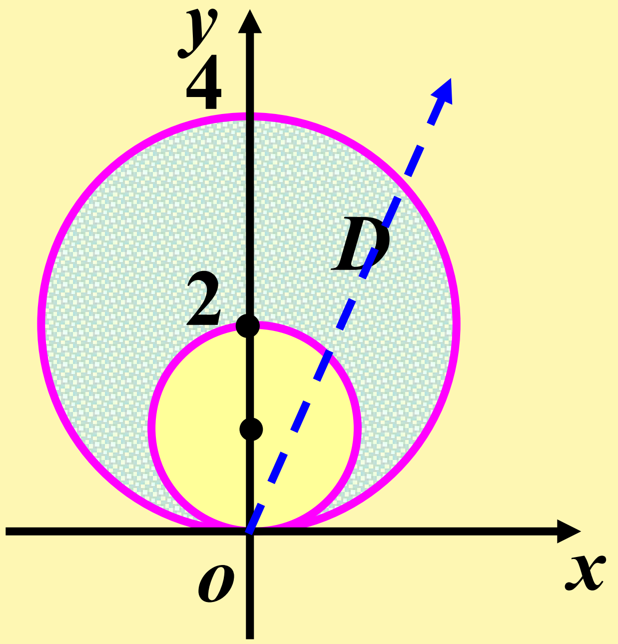
解 $\because$闭区域D关于y轴对称,

所以质心$G(\bar{x},\bar{y})$必位于y轴上

$$\therefore \bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,d\sigma=0,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma$$

由于闭区域D位于半径为1与半径为2的两圆之间，所以它的面积等于这两个圆的面积之差，即$A=3\pi$。

例6 求位于两圆$r=2\sin\theta$和$r=4\sin\theta$之间的均匀薄片的质心(如图)。



$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma$$

$$\iint_D y\,d\sigma=\iint_D r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,dr$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta=7\pi$$

因为$\bar{y}=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3}$,所以质心坐标是$G(0,\frac{7}{3})$

类似地,设物体占空间上的有界闭区域Ω,在点(x,y,z)处的体密度 $\rho(x,y,z)$是Ω上的连续函数,则该物体的质心坐标$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$是

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{M},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{M},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{M}$$

其中 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv$。

8.4.4 转动惯量

构件中各质点或质量单元的质量与其到给定轴线的距离平方乘积的总和。

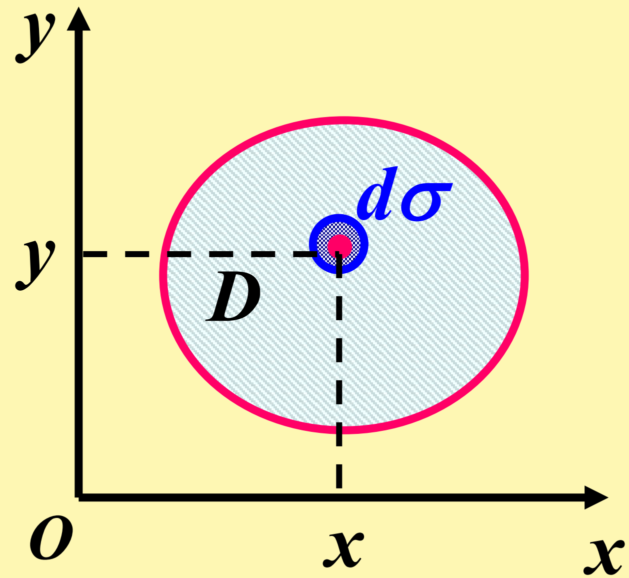
先讨论平面薄片的转动惯量。

设在xoy平面有n个质点分别位于(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)处，质量分别为m_1、m_2、…、m_n,由力学知道:

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}y_i^2 m_i, \quad I_y=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 m_i$$

I_x、I_y是该质点系对于坐标轴x轴以及y轴的转动惯量。

设有一平面薄片占有平面闭区域D，在点(x,y)处具有连续面密度$\rho=\rho(x,y)$，下面利用元素法求该平面薄片对两坐标轴的转动惯量。



先将物体分割为许多小部分，考虑其中的一个部分$d\sigma$，它的质量元素为

$$dm=\rho(x,y)d\sigma$$

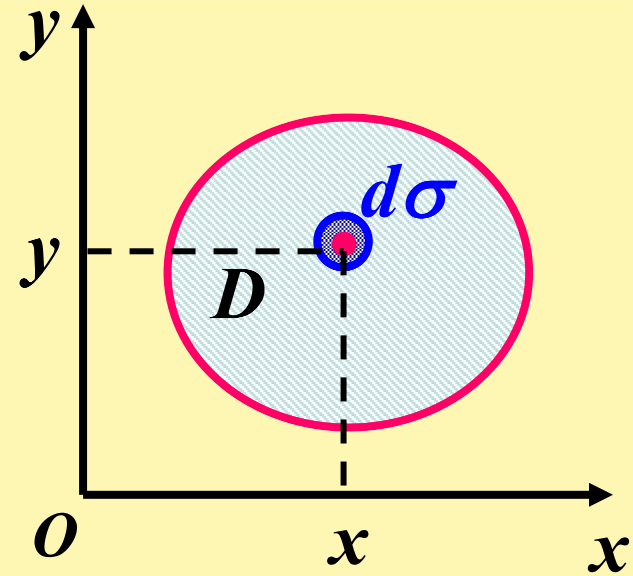
这个部分$d\sigma$对于x轴以及对于y轴的转动惯量元素为

$$dI_x=y^2\rho(x,y)d\sigma \quad dI_y=x^2\rho(x,y)d\sigma$$

以这些元素为被积表达式，在闭区域D上积分，可得

平面薄片对x轴的转动惯量:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)d\sigma,$$

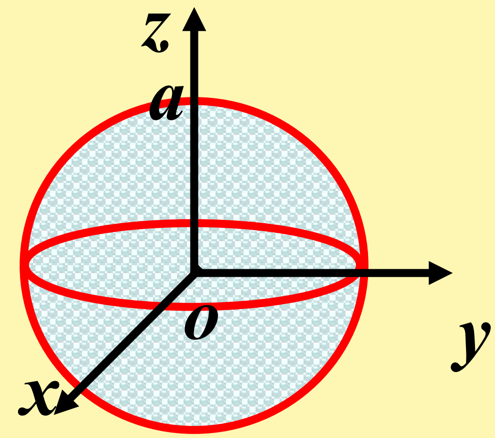


对y轴的转动惯量: $I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)d\sigma$

类似地,设有物体占有空间有界闭区域Ω,在点(x,y,z)处的体密度为$\rho(x,y,z)$是Ω上的连续函数,则该物体对坐标轴的转动惯量是:

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv \text{ 等。}$$

例9 求均匀球体(体密度为常数ρ)对直径的转动惯量。



解 设球心在原点, 半径为a, 则球体对直径z轴的转动惯量为

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho dv \qquad = \frac{2\rho}{3}\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

$$= \rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} r^2 \sin^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr$$

$$= \rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{a} r^4 dr$$

$$= \frac{8}{15}\pi a^5 \rho$$